VECTORES EN EL PLANO

Def: *Definición geométrica de un vector.* El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentemente a un segmento de recta dirigido dado se llama vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se llama una representación del vector.

Def: *Definición algebraica de un vector.* Un vector en el plano xy es un par ordenado de numero reales (a,b). Los números a y b se llaman elementos o componentes del vector v. El vector cero es el vector (0,0).

Def: *Vector Unitario.* Un vector unitario es un vector con longitud 1.

PRODUCTO ESCALAR Y LAS PROYECCIONES EN $\Re^2$

Def: Sea los vectores $\vec{P} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{Q} = (x_2, y_2, z_2)$ se define el producto escalar o también llamado producto punto como el valor numérico que se obtiene al efectuar el producto de los coeficientes correspondientes, esto es:

$$\vec{P}.\vec{Q} = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$$

Teorema: El producto punto cumple con las siguientes propiedades:

1.- a.a=0 si y solo si a=0

2.- αa.b=α(a.b)

3.- a.(b+c)=a.b+a.c

4.- a.b=b.a

Def: *Angulo entre vectores.* Sea u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces el ángulo φ entre u y v está definido como el ángulo no negativo más pequeño entre las representaciones de u y v que tienen el origen como punto inicial. Si u=αv para algún escalar α, entonces φ=0 si α>0 y $\varphi=\pi$ si α<0.

Teorema: Sea v un vector. Entonces

$$|v|^2 = v.v$$

Teorema: Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Si φ es el ángulo entre ellos, entonces:

$$\cos(\varphi) = \frac{u.v}{|u||v|}$$

Def: *Vectores paralelos*. Dos vectores diferentes de cero u y v son paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π. Observe que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

Def: *Vectores ortogonales*. Los vectores u y v diferentes de cero son ortogonales (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema: Los vectores u y v diferentes de cero son ortogonales si y solo si u.v=0

Teorema: Sea v un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector u, el vector

$$w = u - \left(\frac{(u.v)}{|v|^2}\right)v$$

Es ortogonal a v.

Def: *Proyección.* Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces la proyección de u sobre v es un vector denotado por $proy_v\, u$, que se define por

$$proy_v u = \frac{(u.v)}{|v|^2}v$$

Observación: La componente de u en la dirección de v es $\frac{u.v}{|v|}$ y es un escalar.

VECTORES EN EL ESPACIO.

Teorema: Sea $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio. Entonces la distancia $\overline{PQ}$ entre P y Q está dada por

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Def *Vector Unitario.* Un vector unitario u es un vector con magnitud 1. Si v es un vector diferente de cero, entonces $u = \frac{v}{|v|}$ es un vector unitario que tiene la misma dirección de v.

Def: *Cosenos Directores.* Se le denomina los cosenos directores a los ángulos con respecto a los ejes de la base canoníca del espacio y estos viene dados por:

$$\cos(\alpha) = \frac{x_0}{|v|} \quad \cos(\beta) = \frac{y_0}{|v|} \quad \cos(\gamma) = \frac{z_0}{|v|}$$

Teorema: Si φ denota el ángulo positivo más pequeño entre dos vectores u y v diferentes de cero, se tiene

$$\cos(\varphi) = \frac{(u.v)}{|u||v|} = \frac{u}{|u|} \cdot \frac{v}{|v|}$$

Def: *Vectores paralelos y ortogonales.* Dos vectores u y v diferentes de cero son:

1.- *Paralelos:* si el ángulo entre ellos es cero o π.

2.- *Ortogonales* (o perpendiculares) si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$

Teorema:

1.- Si $u \neq 0$, entonces u y v son paralelos si y solo si $v = \alpha u$ para algún escalar $\alpha \neq 0$

2.- Si u y v son diferentes de cero, entonces u y v son ortogonales si y solo si u.v=0

Teorema: Sea v un vector diferente de cero. Entonces para cualquier otro vector u, el vector

$$w = u - \left(\frac{(u.v)}{|v|^2}\right) v$$

Es ortogonal a v.

Def: *Proyección.* Sean u y v dos vectores diferentes de cero. Entonces la proyección de u sobre v es un vector denotado por $proy_v$ u, que se define por

$$proy_v u = \frac{(u.v)}{|v|^2} v$$

Observación: La componente de u en la dirección de v es $\frac{u.v}{|v|}$ y es un escalar.

PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES O PRODUCTO VECTORIAL.

Def: *Producto Cruz.* Sea $u = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$ y $v = d\hat{\imath} + e\hat{\jmath} + f\hat{k}$ entonces el producto cruz (producto vectorial) de u y v denotado por u x v, es un nuevo vector definido por:

$$uxv = (bf - ce)\hat{\imath} + (cd - af)\hat{\jmath} + (ae - bd)\hat{k}$$

Teorema: $u\ x\ v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

Teorema: Sea u, v y w tres vectores en R^3 y sea α un escalar, entonces:

1.- $u\ x\ 0 = 0\ x\ u = 0$

2.- $u\ x\ v = -(v\ x\ u)$ Propiedad anti conmutativa)

3.- $(\alpha u) x\ v = \alpha(u\ x\ v)$

4.- $u\ x\ (v + w) = u\ x\ v + u\ x\ w$ Propiedad distributiva

5.- $(u\ x\ v). w = u. (v\ x\ w)$

6.- $u. (u\ x\ v) = v. (u\ x\ v) = 0$

7.- Si ni u ni v son el vector cero, entonces u y v son paralelos si y solo si u x v=0

Teorema: Si φ es el ángulo entre u y v, entonces.

$$|u\ x\ v| = |u||v| \sin(\varphi)$$

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

Def: Sea $R(x, y, z)$, $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$

La ecuación vectorial de una recta en el espacio viene dado por

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ}$$

La ecuación paramétrica de la recta viene dada por:

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$$

Las ecuaciones simétricas de la recta viene dadas por

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Def: *Plano.* Sea P un punto en el espacio y sea n un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q para los que $\overrightarrow{PQ}.n = 0$ constituye un plano en R^3

Ecuación del plano viene dado por $ax + by + cz = d$

Def: *Planos Paralelos.* Dos planos son paralelos si sus vectores normales son paralelos, es decir, si el producto cruz de sus vectores normales son cero.

ESPACIO VECTORIALES.

Def: *Espacio vectorial real.* Un espacio vectorial real V es un conjunto de objetos, llamados vectores, junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación.

AXIOMAS DE UN ESPACION VECTORIAL.

1.- $Si\ x \in V\ y\ y \in V, entonces\ x + y \in V$

2.- $Para\ todo\ x, y\ y\ z\ en\ V, (x + y) + z = x + (y + z)$

3.- $Existe\ un\ vector\ 0 \in V\ tal\ que\ para\ todo\ x \in V, x + 0 = 0 + x = x$

4.- $Si\ x \in V, existe\ un\ vector - x\ en\ V\ tal\ que\ x + (-x) = 0$

5.- $Si\ x\ y\ y\ estan\ en\ V, entonces\ x + y = y + x$

6.- $Si\ x \in V\ y\ \alpha\ es\ un\ escalar, entonces\ \alpha x \in V$

7.- $Si\ x\ y\ y\ estan\ en\ V\ y\ \alpha\ es\ un\ escalar, entonces\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8.- $Si\ x \in V\ y\ \alpha, \beta\ son\ escalares, entonces\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

9.- $Si\ x \in V\ y\ \alpha\ y\ \beta\ son\ escalares, entonces\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

10.- $Para\ cada\ vector\ x \in V, 1x = x$

Teorema. Sea V un espacio vectorial. Entonces:

1.- $\alpha 0 = 0$ para todo escalar α

2.- $0.x = 0$ para todo $x \in V$

3.- Si $\alpha x = 0$ entonces $\alpha=0$ o $x=0$ (o ambos)

4.- $(-1)x = -x$ para todo $x \in V$

SUBESPACIOS.

Def. *Subespacio*: Sea H un subconjunto no vacio de un espacio vectorial V y suponga que H es en sí un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V. entonces se dice que H es un subespacio de V.

Teorema: Un subconjunto H es subespacio vectorial de V si se cumple las tres reglas de cerradura.

1.- H es no vacio.

2.- Si $x \in H$ y $y \in H$, entonces $x + y \in V$

3.- Si $x \in H$, entonces $\alpha x \in H$ para todo escalar α.

TODO SUBESPACIO DE UN ESPACIO VECTORIAL V CONTIENE AL 0.

Teorema. Sean H_1 y H_2 dos subespacios de un espacio vectorial V. Entonces $H_1 \cap H_2$ es un subespacio.

COMBINACION LINEAL Y ESPACIO GENERADO.

Def. *Combinación Lineal*. Sean $v_1, v_2 \dots v_n$ vectores en un espacio vectorial V. Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares se llama una combinación lineal.

Def: *Conjunto Generador*. Se dice que los vectores $v_1, v_2 \dots v_n$ en un espacio vectorial V generan a V si a todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $v \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n$ tales que:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

Def: *Espacio generado por un conjunto de vectores*. Sea $v_1, v_2 \dots v_k$ k vectores en un espacio vectorial V. El espacio generado por $\{v_1, v_2 \dots v_k\}$ es el conjunto de combinaciones lineales de $v_1, v_2 \dots v_k$. Es decir,

$$gen\{v_1, v_2 \dots v_k\} = \{v: v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k\}$$

donde $a_1, a_2, \dots, a_n$ son escalares.

Teorema. Si $v_1, v_2 \ldots v_k$ son vectores en un espacio vectorial V, entonces $gen\{v_1, v_2 \ldots v_k\}$ es un subespacio de V.

Teorema: Sean $v_1, v_2 \ldots v_n, v_{n+1}$ n+1 vectores que están en un subespacio vectorial V. Si $v_1, v_2 \ldots v_n$ generan a V, entonces $v_1, v_2 \ldots v_n, v_{n+1}$ también generan a V. Es decir, si se agregan uno, o más vectores a un conjunto generador se obtiene otro conjunto generador.

INDEPENDENCIA LINEAL.

Def. *Dependencia e independencia lineal.* Sean $v_1, v_2 \ldots v_n$ n vectores en un espacio vectorial V. Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ no todos son ceros tales que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

Si los vectores no son linealmente dependientes, se dice que son *linealmente independientes.* Para el caso en que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

Teorema. Dos vectores en un espacio vectorial son linealmente dependientes si y solo si uno es un múltiplo escalar del otro.

Teorema: Un conjunto de n vectores en R^m siempre es linealmente dependiente si n>m

COROLARIO: Un conjunto de vectores linealmente independiente en R^n contiene a lo menos n vectores.

Teorema: Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Entonces las columnas de A, consideradas como vectores, son linealmente dependientes si y solo si el sistema Ac=0 tiene soluciones no triviales.

Teorema: Sean $v_1, v_2 \ldots v_n$ n vectores en R^n y sea A una matriz de n x n cuyas columnas son $v_1, v_2 \ldots v_n$. Entonces $v_1, v_2 \ldots v_n$ son linealmente independientes si y solo si la única solución al sistema homogéneo Ax=0 es la solución trivial x=0.

Teorema: Sea A una matriz n x n. Entonces det(A) ≠0 si y solo si las columnas de A son linealmente independientes.

Teorema: TEOREMA RESUMEN.

Sea A una matriz de n x n. Entonces las ocho afirmaciones siguientes son equivalentes. Es decir, cada una de ellas implica las otras cinco (de manera que si se cumple una, todas se cumplen, y si una es falsa, todas son falsas).

i.- A es invertible.

ii.- La única solución al sistema homogéneo Ax=0 es la solución trivial.

iii.- El sistema Ax=b tiene una solución única para cada n-vector b.

iv.- A es equivalente por renglones a la matriz identidad I_n de n x n; es decir, la forma escalonada reducida por renglones de A es I_n.

v.- A se puede escribir como el producto de matrices elementales.

vi.- La forma escalonada por renglones de A tiene n pivotes.

vii.- $\det A \neq 0$

viii.- Las columnas (y renglones) de A son linealmente independientes.

Teorema: Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en R^n genera a R^n.

BASES Y DIMENSIONES.

Def: *Base.* Un conjunto finito de vectores $v_1, v_2 \ldots v_n$ es una base para un espacio vectorial si

1.- $v_1, v_2 \ldots v_n$ es linealmente independiente

2.- $v_1, v_2 \ldots v_n$ genera a V

Teorema: Si $v_1, v_2 \ldots v_n$ es una base para V y si v∈V, entonces existe un conjunto único de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$

Teorema: Si $v_1, v_2 \ldots v_n$ y $u_1, u_2 \ldots u_m$ son bases en un espacio vectorial V, entonces m=n; es decir, cualesquiera dos bases en un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

Def: *Dimensión.* Si el espacio vectorial V tiene una base finita, entonces la dimensión de V es el número de vectores en todas las bases y V se llama espacio vectorial de dimensión finita. De otra manera V se llama espacio vectorial de dimensión infinita. Si V=(0) entonces se dice que tiene dimensión cero.

Teorema: Suponga que dimV=n. si $v_1, v_2 \dots v_m$ es un conjunto m de vectores linealmente independientes en V, entonces m≤n.

Teorema: Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. entonces H tiene dimensión finito y

$$\dim(H) \leq \dim(V)$$

Teorema: Cualesquieras n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.